

GIOCHI MATEMATICI -2

Primo livello

1. *Il gioco del gambero*

Con un vostro amico, organizzate il seguente gioco: partendo da 144, ognuno, a testa, deve togliere un numero che va da un minimo di 1 ad un massimo di 11 al risultato di ogni successiva sottrazione (ad esempio, il primo toglie 7, quindi rimane 137, mentre il secondo toglie 5, quindi rimane 132, e così via). Vince chi riesce ad effettuare l'ultima sottrazione, ossia chi riesce ad annullare il numero rimastogli. Supponendo che, per sorteggio, ad iniziare sia il vostro avversario, quale strategia adottare, indipendentemente dalle mosse del vostro amico, per poter comunque vincere la partita?

Secondo livello

2. *Il piccolo Gauss*

Nella prima classe di una scuola elementare di Brunswick (Germania), all'incirca nel 1783, il maestro, stanco dei continui schiamazzi dei suoi allievi, decide di assegnare loro un compito che li avrebbe certamente tenuti impegnati per un po': dovevano calcolare la somma dei primi cento numeri, ossia

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \dots + 100 = ?$$

Sfortunatamente, nella classe, era presente il piccolo Gauss (come, chi è Gauss? Se fate questa domanda, sarete immediatamente posti in esilio da qualche parte sul continente), il quale in pochi secondi (ripeto, secondi) porse la sua risposta esatta allo stupefatto maestro. Com'è possibile dare tale risposta in pochi secondi (ripeto, secondi) senza fare "quasi" alcun calcolo? (Tenete conto ovviamente che il piccolo Gauss non aveva a disposizione che foglio e penna, quindi niente pallottoliere, calcolatrice, palmare, cellulare o altra diavoleria elettronica).

Terzo livello

2. I cinque cappelli

Un illusionista sottopone tre amici, Gino, Pino e Rino, al seguente gioco: fra cinque cappelli, di cui tre bianchi e due neri (informazione nota a Gino, Pino e Rino), se ne scelgono tre, ASSOLUTAMENTE A CASO. Tali cappelli vengono poi fatti indossare a Gino, Pino e Rino, i quali, nel frattempo, erano stati accuratamente bendati. L'illusionista mostra poi, sbendandolo per un attimo, al solo Gino, il colore dei cappelli degli altri due e gli chiede poi se, con tale informazione, è capace di sapere CON CERTEZZA di che colore è il suo, a prezzo di 100.000€ nel caso in cui la risposta sia errata. Gino, pur avendo visto il colore dei cappelli di Pino e Rino (e ovviamente non avendo fatto in tempo a vedere il proprio) conclude che non può sapere con certezza il colore del proprio cappello e dunque rinuncia pubblicamente alla risposta. Allora, l'illusionista passa a Pino, cui mostra, sbendandolo per un istante, il colore del cappello del solo Rino e gli porge successivamente lo stesso quesito in precedenza fatto a Gino, ma anche lui, concludendo di non poter determinare con certezza di che colore è il proprio cappello, rinuncia pubblicamente alla risposta.

A questo punto, l'illusionista, prima di poter fare qualsiasi mossa, viene preceduto da Rino, il quale, non avendo ovviamente visto nulla, ma avendo sentito TUTTO, dice esplicitamente che il proprio cappello è bianco. Stupefatto, l'illusionista gli chiede come ha fatto: ha tirato a caso? "No", risponde allora Rino, "io sapevo con assoluta certezza che il mio cappello era bianco". Come ha fatto Rino, sulla base di tutto ciò che ha sentito, a rispondere con ASSOLUTA CERTEZZA che il suo cappello era bianco o, che è lo stesso, che non poteva assolutamente essere nero?

NOTA BENE: la risoluzione di uno qualsiasi dei problemi proposti si intende valida se e solo se l'eventuale risposta corretta è corredata da una adeguata motivazione. L'incauta persona che rispondendo, ad esempio, all'ultimo problema che la risposta è esatta in base al calcolo della probabilità o alle fasi della luna, sarebbe immediatamente costretta, a proprie spese, a percorrere la tratta ferroviaria Olbia - Sassari e ritorno con frequenza giornaliera per due mesi.

SOLUZIONI

1. Una strategia sicuramente vincente è quella di fare in modo che, dopo la mossa dell'amico e la vostra, il numero complessivamente sottratto sia costantemente pari a 12 (ad esempio, se il vostro amico inizia togliendo 4, voi togliete 8 e così via). Alla fine, essendo 144 un multiplo di 12, sicuramente vi troverete nella situazione in cui il vostro amico si trova necessariamente a quota 12, con la facile conseguenza che, ora, qualunque numero egli tolga, voi certamente vincerete.

2. Il piccolo Gauss pensò che, invece di sommare i numeri nell'ordine consueto (ma non obbligatorio), cioè partendo da 1 aggiungere 2 poi 3 e così via, poteva sommare i numeri da 1 a 100 seguendo un altro ordine che gli garantisse una certa regolarità. In particolare, sommando 1 a 100, cioè il primo con l'ultimo numero, otteneva 101, e lo stesso succedeva con il secondo (2) ed il penultimo (99), e di nuovo col terzo (3) ed il terzultimo (98) e così via. Dunque, pensò che il risultato sarebbe stato immediatamente trovato moltiplicando la somma comune, ossia 101, a tutte le coppie così determinate, che ovviamente erano 50, ossia $101 \cdot 50 = 5050$. Certo, lui si chiamava Gauss....

3. Il gioco NON vi chiede di determinare quale disposizione di cappelli sia uscita, ma SOLO di dimostrare che, qualunque sia stata la disposizione di cappelli, a Rino, per come sono andate le cose, non può essere capitato un cappello nero. Infatti, indichiamo con disposizione 1 (in breve, D1) quella indicata con B N N, cioè quella in cui Gino ha un cappello bianco, mentre Pino e Rino hanno un cappello nero; D2 sia B B N e D3 sia N B N.

Notare che queste sono le uniche tre disposizioni in cui Rino ha un cappello nero: se riusciamo a dimostrare che, per come sono andate le cose, nessuna di queste tre disposizioni può essere uscita, allora necessariamente, qualunque altra disposizione sia capitata, Rino non può che avere un cappello bianco.

D1 non può essere uscita, altrimenti è evidente che Gino, vedendo due cappelli neri, avrebbe risposto che certamente il suo cappello era bianco, cosa che NON è successa. Vediamo ora perché anche D2 (e per la stessa ragione D3) non può essere uscita: se fosse capitata D2, infatti, dopo che Gino ha rinunciato a rispondere, Pino, vedendo che il terzo cappello è nero, avrebbe così ragionato: "Se il mio cappello fosse nero, Gino ne avrebbe visti due neri ed avrebbe risposto che il suo era certamente bianco: siccome non l'ha fatto, ciò significa che certamente il mio cappello è bianco". Pertanto, Pino avrebbe risposto che il suo cappello era bianco, invece Pino non ha dato alcuna risposta, quindi la disposizione D2 non può essere uscita (e allo stesso modo D3). Dunque, qualunque altra disposizione sia capitata, Rino non poteva certamente che avere un cappello bianco.