

# GIOCHI MATEMATICI

Olbia 25-05-2005

## Primo livello

### 1. *Il notaio sfortunato*

Un ricco magnate petrolifero, fortunato padre di una bellissima figlia (Alice), scopre con grande piacere che la moglie è di nuovo in dolce attesa. Essendo molto preciso, prima della venuta al mondo del nascituro, si reca dal notaio per redigere un nuovo testamento che tenga conto del nuovo arrivato. Sfortunatamente, il magnate muore prima del parto, e non vede nascere ben due gemelli, sani e forti. Al momento della lettura del testamento, il notaio scopre che il magnate aveva disposto di lasciare esattamente metà del suo patrimonio alla moglie e l'altra metà in parti uguali ai due figli. Il problema che il povero notaio si trova ora a fronteggiare è: come dividere il patrimonio in maniera equa tra la moglie e i tre figli, dove per "modo equo" si intende rispettando la volontà di ripartizione espressa pensando soltanto a due figli?

## Secondo livello

### 2. Il gioco delle sette stanghette

Due giocatori, a turno, devono barrare delle stanghette partendo dallo schema riportato in figura 1. L'unica regola che devono seguire è che, ad ogni turno, le stanghette barrate devono appartenere alla medesima riga: non importa quante siano o se stiano vicine.

Vince chi lascia l'ultima stanghetta da barrare all'avversario (o, se preferite, perde chi rimane con l'ultima stanghetta da barrare).

Si può dimostrare che il giocatore che inizia per secondo, seguendo una strategia ottimale, può sempre vincere, indipendentemente dalle mosse dell'avversario. Tuttavia, per rendere tale quesito più abbordabile, chiediamo quale mossa vincente voi fareste, indipendentemente da quelle successive del vostro avversario, se la prima mossa del vostro avversario fosse quella riportata in figura 2 e lo stesso con quella di figura 3 (le due mosse sicuramente vincenti, non necessariamente uniche, che dovete trovare in risposta a quelle indicate in figura 2 e 3 sono ovviamente indipendenti l'una dall'altra, quindi, se non riuscite a determinare entrambe le soluzioni, cercate di fornirne anche soltanto una).

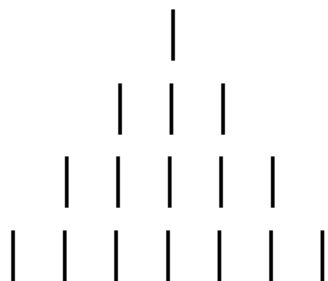


Fig. 1

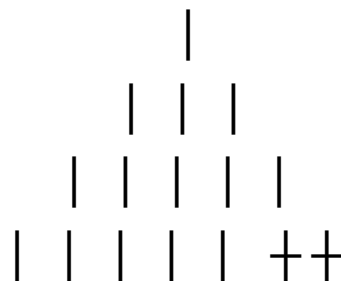


Fig. 2

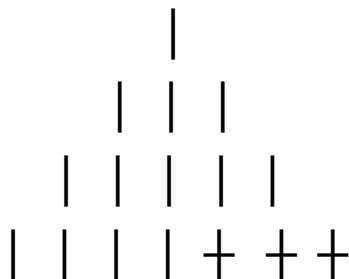


Fig. 3

## Terzo livello

### 3. *La bilancia magica*

Avete quattro sacchi di monete tutte uguali (il numero non è assolutamente importante ai fini del quesito) da 10 grammi ciascuna ed un sacco che contiene monete uguali in tutto e per tutto alle precedenti, ma da 11 grammi ciascuna. Le monete sono ovviamente indistinguibili al tatto e all'occhio e purtroppo voi non sapete quale dei cinque sacchi complessivamente a disposizione (tutti uguali anche essi...) contenga le monete da 11 grammi. Con una bilancia digitale, dotata di display elettronico che vi dà l'esatto peso in grammi di ogni oggetto posto sopra al piatto, dovete scoprire in quale sacco stiano le monete più pesanti: il punto è che, però, dovete riuscirci col MINIMO numero di pesate. Ad esempio, è evidente che se peso una moneta alla volta presa da ciascun sacco, con quattro pesate al massimo sono sicuro di scoprire il sacco cercato: infatti, se anche le prime quattro monete sono da 10 grammi, le monete da 11 saranno ovviamente nel quinto. Tale procedura, quindi, dà la sicurezza della risposta con quattro pesate.

Quale procedura adotereste per poter avere la sicurezza della risposta minimizzando il numero delle pesate?

**NOTA BENE:** la risoluzione di uno qualsiasi dei problemi proposti si intende valida se e solo se l'eventuale risposta corretta è corredata da una adeguata motivazione. L'incauta persona che rispondendo, ad esempio, all'ultimo problema che basta mettere cinque monete, provenienti dai cinque sacchi, tutte assieme sopra la bilancia e poi tirarle via velocemente una ad una, pretendendo così di fare sempre e solo una pesata, verrebbe immediatamente escluso dal buffet.

## SOLUZIONI

1. La volontà di ripartizione del magnate indica che ai figli deve andare esattamente la stessa parte di patrimonio (che siano due o tre, ovviamente non importa), mentre alla madre deve andare il doppio del patrimonio dei figli, perché nella originale divisione a lei andava la metà e a ciascun figlio un quarto. Pertanto, l'unica suddivisione ragionevole è il 40% alla madre e il 20% a ciascun figlio (si può arrivare alla soluzione con un'impostazione più formale del tipo  $x + 3y = 1$ , ove  $x$  è la frazione destinata alla madre e  $y$  quella di ciascun figlio: sapendo che  $x$  deve essere il doppio di  $y$ , l'equazione diviene  $5y = 1$ , quindi  $y = 1/5$  e  $x = 2/5$ ).

2. Dalle regole del gioco, si possono desumere (e, in realtà, dimostrare anche formalmente) alcune regole sulla base delle quali si può vincere qualunque partita, supposto che si inizi per secondo. Vediamo le tre fondamentali, che lasciano fuori solo alcune estreme, ma facili situazioni come una stanghetta per riga su tre righe.

Regola 1: se si lasciano all'avversario due sole righe con lo stesso numero  $n > 1$  di stanghette per ogni riga, si vince.

Regola 2: se si lasciano all'avversario quattro righe con lo stesso numero  $n \geq 1$  di stanghette per ogni riga su DUE di esse e lo stesso numero  $m \geq 1$  di stanghette per ogni riga sulle ALTRE DUE (compreso il caso  $m = n$ , solo se  $n > 1$ ), si vince.

Regola 3: se si lasciano all'avversario tre sole righe con le seguenti disposizioni di stanghette (ovviamente l'ordine non importa): UNA-DUE-TRE oppure UNA-QUATTRO-CINQUE, allora si vince.

Notate che, dal punto di vista teorico, tutte e tre le regole indicano che se lasciate all'avversario un numero pari di stanghette, in quelle situazioni, vincete. Attenzione però a non generalizzare troppo: se lasciate all'avversario tre righe con la disposizione TRE-QUATTRO-CINQUE, il numero complessivo di stanghette è pari ma perderete, perché lui, in base alla regola 3, barrerà due stanghette nella riga che ne contiene tre.

Pertanto, tornando al quesito, l'unica risposta vincente alla mossa iniziale dell'avversario indicata in figura 1 è, in base alla regola 2, quella di togliere due stanghette dalla seconda fila. Simulate la continuazione della partita e assicuratevi che, comunque giochi successivamente l'avversario, se voi giocate al meglio seguendo le tre regole, uscirete certamente vincitori. Al contrario, se rispondete in qualunque altro modo (fate una

simulazione anche qui), sarà l'avversario che si potrà giovare di una delle suddette regole per "fregarvi".

Analogamente, la sola mossa vincente in risposta a quella indicata in figura 2 è, in base alla regola 3, quella di togliere tutte le stanghette della seconda riga.

3. Il numero minimo di pesate che si possono fare per determinare da quale sacco provengono le monete da 11 grammi è sorprendentemente UNA sola. L'idea che sta alla base della procedura è che non si debbano prendere le monete in numero uguale dai sacchi per pesarle (in tal modo, infatti, non si riesce a scendere sotto alle tre pesate), ma viceversa prenderle in numero DIVERSO, quindi, ad esempio, ne prendo una dal primo sacco, due dal secondo, tre dal terzo, quattro dal quarto e nessuna (oppure cinque) dal quinto. In tal modo, mi ritrovo con DIECI monete che metto contemporaneamente sul piatto e faccio una sola pesata. Se esce 101 (oppure 151), significa che le monete da 11 grammi stanno nel primo sacco, se esce 102 (oppure 152) staranno nel secondo, 103 (o 153) nel terzo, 104 nel quarto (o 154) e 100 (o 155) nel quinto.